Задача Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике

Задача Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0, \quad u_y(x,0) = f(x), \quad u_y(x,b) = g(x). \end{cases}$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{1}$$

Подставляя (1) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = const.$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad 0 < x < a, \tag{2}$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \quad 0 < y < b. \tag{3}$$

Подставив (1) в однородные граничные условия, получим условия

$$X'(0) = X'(a) = 0, \tag{4}$$

которые вместе с уравнением (1) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}, \quad k = 0,1,\ldots,$$

$$\left\|X_k(x)\right\|^2 = \begin{cases} a, & k = 0, \\ \frac{a}{2}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Для каждого значения параметра $c = c_k$ общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$Y_0(y) = A_0 y + B_0, \quad Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}.$$

В результате получаем решение уравнения Лапласа в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (2), (4):

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(x)Y_k(y)=A_0y+B_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_ke^{\frac{k\pi y}{a}}+B_ke^{-\frac{k\pi y}{a}}\right)\cos\frac{k\pi x}{a}. \quad (8)$$

Подчиним полученный ряд (8) граничным условиям при y = 0 и y = b. Будем иметь:

$$u_y(x,0)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_k-B_k\right)\cos\frac{k\pi x}{a}=f(x),$$

$$u_y(x,b)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_ke^{\frac{k\pi b}{a}}-B_ke^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)\cos\frac{k\pi x}{a}=g(x).$$

Разлагая функции $f(x)$ и $g(x)$ в ряд по собственным функциям $X_k(x)=\cos\frac{k\pi x}{a}$, получим условия для нахождения коэффициентов A_0, A_k, B_k. Так как для определения A_0 имеем два уравнения:

$$A_0=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx,\quad A_0=\frac{1}{a}\int_0^a g(x)dx,$$

То в случае, если не будет выполнено условие

$$\boxed{\int_0^a f(x)dx=\int_0^a g(x)dx,} \quad (9)$$

то рассматриваемая задача Неймана не будет иметь решения. Если условие будет выполнено, то

$$A_0=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx, \quad (10)$$

а коэффициенты A_k и B_k (k ≠ 0) ряда (8) найдем, решая системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{k\pi}{a}\left(A_k - B_k\right) = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\cos\dfrac{k\pi x}{a}\,dx, \\ \dfrac{k\pi}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right) = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a g(x)\cos\dfrac{k\pi x}{a}\,dx, \end{cases} \qquad (11)$$

$$k = 1,2,\ldots$$

Так как для каждого k определитель матрицы системы (11) отличен от 0, то система (11) имеет единственное решение.
Коэффициент B_0 ряда (8) не может быть определен однозначно, он принимает произвольные значения.

Вывод: *Задача Неймана имеет решение, если граничные функции удовлетворяют условию (9). При этом решение может быть записано в виде ряда (8), коэффициенты которого* A_0, A_k, B_k $(k \neq 0)$ *определяются условиями (10), (11), а* B_0 *– произвольная постоянная.*

Задача Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, & (1) \\ u_x(0,y) = f_1(y), \quad u_x(a,y) = f_2(y), \quad 0 \le y \le b, & (2) \\ u_y(x,0) = g_1(x), \quad u_y(x,b) = g_2(x), \quad 0 \le x \le a. & (3) \end{cases}$$

Условие разрешимости задачи Неймана (1)–(3):

$$\boxed{\int_0^b \left(f_1(y) - f_2(y)\right) dy + \int_0^a \left(g_1(x) - g_2(x)\right) dx = 0.} \qquad (4)$$

1. Если граничные функции удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\boxed{\begin{aligned} &\int_0^b f_1(y)dy - \int_0^b f_2(y)dy = 0, \\ &\int_0^a g_1(x)dx - \int_0^a g_2(x)dx = 0, \end{aligned}} \end{aligned} \qquad (5)$$

то решение задачи (1)-(3) можно искать в виде суммы

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y),$$

где функции $v(x, y)$ и $w(x, y)$ являются решениями краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ v_x(0, y) = v_x(a, y) = 0, \quad u_y(x,0) = g_1(x), \quad u_y(x,b) = g_2(x), \end{cases} \qquad (6)$$

и

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ w_x(0, y) = f_1(y), \quad w_x(a, y) = f_2(y), \quad u_y(x,0) = u_y(x,b) = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

соответственно.

Решение краевых задач вида (6), (7) рассмотрено на занятии № 10.

2. Если граничные функции удовлетворяют условиям (4) (выполнено условие разрешимости задачи Неймана)**, но не удовлетворяют условиям (5)** (в этом случае задачи (6) и (7) не имеют решений), то решение задачи (1)-(3) можно искать в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y), \qquad (8)$$

где функция $v(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$v_x(0, y) = f_1(y), \quad v_x(a, y) = f_2(y), \quad 0 \le y \le b. \qquad (9)$$

Такая функция, в свою очередь, может быть найдена в виде:

$$v(x, y) = A(y)x^2 + B(y)x. \qquad (10)$$

Подчинив выражение (10) условиям (9), найдем

$$A(y) = \frac{f_2(y) - f_1(y)}{2a}, \qquad B(y) = f_1(y). \qquad (11)$$

После подстановки (8) в условия краевой задачи (1)-(3), построим краевую задачу для нахождения функции $w(x, y)$:

$$\begin{cases} \Delta w = -\Delta v, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, & (12) \\ w_x(0, y) = w_x(a, y) = 0, \quad 0 \le y \le b, & (13) \\ w_y(x,0) = g_1(x) - v_y(x,0), & \\ w_y(x,b) = g_2(x) - v_y(x,b), \quad 0 \le x \le a. & (14)\} \end{cases}$$

Решение краевой задачи (12)-(14) можно искать в виде ряда по собственным функциям:

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x) \cos\frac{k\pi x}{a}. \tag{15}$$

Подстановка ряда (15) в уравнение (12) и граничные условия (14) дает следующие краевые задачи для определения функций $Y_k(y)$:

$$Y_k''(y) - \left(\tfrac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a \Delta v dx, & k = 0, \\ -\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a \Delta v \cdot \cos\tfrac{k\pi x}{a} dx, & k = 1,2,... \end{cases}$$

$$Y_k'(0) = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a (g_1(x) - v_y(x,0)) dx, & k = 0, \\ -\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a (g_1(x) - v_y(x,0)) \cdot \cos\tfrac{k\pi x}{a} dx, & k = 1,2,... \end{cases}$$

$$Y_k'(b) = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a (g_2(x) - v_y(x,b)) dx, & k = 0, \\ -\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a (g_2(x) - v_y(x,b)) \cdot \cos\tfrac{k\pi x}{a} dx, & k = 1,2,... \end{cases}$$

Найдя функции $Y_k(y),\ 0,1,\ldots,$ в результате получим решение задачи (1)-(3) в виде (8), где функция $v(x,\ y)$ определяется формулами (10), (11), а функция $w(x, y)$ – рядом (15).